2 次方程式

> $x^2-7x+12=0$ や $x^2+9=-6x$ のように移行して整理すると，（x の 2 次式）$=0$の形になる方程式を，x についての 2 次方程式といいます。2 次方程式を成り立たせる文字の値を，その**2 次方程式の解**といい，すべての解を求めることをその**2 次方程式を解く**といいます。

復習　1 次方程式

$$ax=b \text{ を解くと，}\quad x=\frac{b}{a} \text{ となる。}$$

$ax^2=b$ または $ax^2-b=0$型の解き方

1 次の項がない $ax^2=b$ または $ax^2-b=0$ の形をした 2 次方程式は，

$x^2=\frac{b}{a}$の形に変形して，左辺の平方根を求めることにより，$\boldsymbol{x=\pm\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}$と求めることができます。

例　次の 2 次方程式を解きなさい。

$x^2=16$ を解くと，16 の平方根は± 4であるから，$x=\pm 4$

$4x^2-5=0$

$4x^2 \quad =5$　　　←左辺の－5 を右辺に移項した。

$x^2 \quad =\frac{5}{4}$　　　← x^2の係数 4 で両辺を割った。

$x \quad =\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$　　　←$\frac{5}{4}$の平方根を考えた。

$x \quad =\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　←$\sqrt{4}=2$と計算した。

$(x+m)^2=n$ 型の解き方

$x+m=X$ と置き換えをすることによって，$X^2=n$ となるので，n の平方根を考えて解くことができます。最後に $X=x+m$ と置き換えをした文字 X を元に戻して x について解きましょう。

例　次の方程式を解きなさい。

$(x+2)^2=9$

$x+2=X$ と置きかえると $X^2=9$

9 の平方根は ± 3 であるから，$X=\pm 3$

$X=x+2$ であったから置きかえた文字を元に戻して， $x+2=\pm 3$
移項して， $x=-2\pm 3$
注　$\pm$の数値に根号が含まれていないので， さらに計算をする必要があります。
つまり $x+2=3,\quad x+2=-3$
$x+2=3$ より $x=1$
$x+2=-3$ より $x=-5$
答え　$x=1,\ -5$

例　$(x-3)^2-10=0$
まず移行して，$(x-3)^2=10$
$x-3=X$ と置きかえると， $X^2=10$
10 の平方根は $\pm\sqrt{10}$ であるから， $X=\pm\sqrt{10}$
$X=x-3$ であったから置きかえた文字を元に戻して， $x-3=\pm\sqrt{10}$
移項して， $x=3\pm\sqrt{10}$
注　$\pm$の数値に根号が含まれているので， さらに計算をする必要はありません。

$x^2+px+q=0$ の解き方

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ は， 乗法公式 2　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$，乗法公式 3 $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ を利用することにより， $(x+m)^2=n$ の形に変形して解くことができます。

例　$x^2+6x-4=0$ を解きなさい。
左辺の－4 を右辺に移項する。
$x^2+6x=4$・・・①
乗法公式 2　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ より， $x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$ を利用して，

$$2\mathrm{a}=6,\ \mathrm{a}=3$$

$x^2+6x=(x+3)^2-3^2$と変形できます。①の左辺を $(x+3)^2-3^2$ に置きかえると

$$(x+3)^2-3^2=4$$

$3^2=9$ を移項して整理すると， $(x+3)^2=13$
答え　$x=-3\pm\sqrt{13}$　← 途中式がわからない場合は， $(x+m)^2=n$ 型の解き方を参考に

2 次方程式の解の公式

2 次方程式$ax^2+bx+c=0$の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

（証明）

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c$$

c を左辺から右辺に移項した。

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$a>0$よりaで両辺を割った。

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

左辺を 2 乗の形にするために x の係数の半分を 2 乗したものを両辺に加えた。

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

左辺を因数分解した。

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}$$

右辺の分母を$4a^2$にして通分した。

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

右辺を計算。

$$X^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$X=x+\dfrac{b}{2a}$ とおく。

$$X=\begin{cases} a>0 \text{ のとき } \dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ a<0 \text{ のとき } \dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{-2a} \end{cases}$$

$X^2=A$ ならば $X=\pm\sqrt{A}$ であることを利用。

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a>0,\quad a<0$ 合わせて $\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

証明終わり

$2x^2+5x-1=0$を解きなさい。

平方根の変形を利用した解き方

$$2x^2+5x-1=0$$

$$2x^2+5x=1$$

$$x^2+\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2 \\
\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{1}{2}+\frac{25}{16} \\
\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{8}{16}+\frac{25}{16} \\
\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 &= \frac{33}{16} \\
x+\frac{5}{4} &= \pm\frac{\sqrt{33}}{4} \\
x &= \frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}
\end{aligned}
$$

解の公式を利用した解き方

$2x^2+5x-1=0$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ に $a=2$，$b=5$，$c=-1$ を代入すると，

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{4}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$$

注

解の公式を覚えれない人が多くいると思いますが， そのときは解の公式を無理に使わずに，平方根の考え方を用いた方法で解いていけばよい。

公式というのは計算をより簡単にするためにあるので， 覚えることができないのであれば複雑な計算を要する平方根の考え方を使った式変形を毎回すればよい。

$(x+a)(x+b)=0$ 型～因数分解による解き方～

2 つの数や式を A，B とするとき，AB＝0 ならば，A＝0 または B＝0
掛け算結果が 0 になるためには，掛けられる数 A か掛ける数の B の少なくともどちらか一方が 0 であることが必要です。

例　$(x+4)(x-1)=0$を解きなさい。

$x+4$ と $x-1$ をかけて 0 になるから，どちらか一方が 0 であるから，$x+4=0$ または $x-1=0$

$x+4=0$ から $x=-4$，$x-1=0$ から $x=1$

答え　$x=-4,\ 1$

公式

$(x+a)(x+b)=0$ を解くと，$x=-a,\ -b$

注　$(x+a)(x+b)=0$ → $x=-a,\ -b$ だけを覚えてなんで $+a$ から$-a$ に符号が変わっているのか質問する中学生や高校生をよく見かけますが，この公式の背景には AB＝0 ならば，A＝0 または B＝0 があります。これを使い，1 次式 = 0 から移項によって符号が変わっていることを掴むことが大切です。公式に慣れないうちは毎回 例 のように（1 次式）＝0 または （1 次式）= 0 の形に直して計算するとよいでしょう。

$x^2+(a+b)x+ab=0$ 型の 2 次方程式

左辺を因数分解してから解いていきます。

復習

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例　$x^2+4x+3=0$ を解きなさい。

左辺を因数分解して，$(x+3)(x+1)=0$

$x+3=0$ または $x+1=0$　答え　$x=-3,-1$

$x^2+2ax+a^2=0$ 型の 2 次方程式

左辺を因数分解して解いていきます。

復習　$x^2+2ax+a^2=(x+a)(x+b)$

例　$x^2+10x+25=0$ を解きなさい。

左辺を因数分解すると，$(x+5)^2=0$

$x+5=0$ または $x+5=0$ 答え　$x=-5$（重複）

解が与えられた 2 次方程式の解き方

2 次方程式の解とは，その 2 次方程式を成り立たせる文字 x の値のことでした。2 次方程式の解が与えられたときは，与えられた解を x に代入し，求める文字についての方程式をつくります。

例　2 次方程式 $x^2 - ax - 12 = 0$ の 1 つの解が 6 のとき，a の値ともう 1 つの解を求めなさい。

$x^2 - ax - 12 = 0$ に $x = 6$ を代入すると，$6^2 - 6a - 12 = 0$ これを a についての 1 次方程式として解くと，

$36 - 12 = 6a$ より　$a = 4$

$a = 4$ を元の 2 次方程式 $x^2 - ax - 12 = 0$ *に代入して，*

$x^2 - 4x - 12 = 0$

左辺を因数分解すると，$(x + 2)(x - 6) = 0$

これを解いて，$x = -2, 6$

よって，もう 1 つの解は -2　答え　$a = 4$，もう 1 つの解　-2